Dr. Emanuel Scheidegger
Dr. Christoph Kawan

Topologie
SS 10
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 1

Differentialformen im $\mathbb{R}^n$

1. Skalarprodukte auf $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$.
   Es sei $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\,\rangle, \mathrm{vol})$ der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit nicht–ausgearteter symmetrischer Bilinearform $\langle\,,\,\rangle$ und Volumenform $\mathrm{vol} = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$.

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $\langle\,,\,\rangle$ eine nicht–ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $\Omega^q(\mathbb{R}^n)$ induziert, bezüglich welcher die Menge $\{\mathrm{d}x_I | I = \{i_1 \leq \cdots \leq i_q\}\}$ eine orthonormale Basis definiert.

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß die Abbildung

   $$\begin{aligned} \Omega^q(\mathbb{R}^n) \times \Omega^{n-q}(\mathbb{R}^n) &\xrightarrow{\wedge} \Omega^n(\mathbb{R}^n) \\ \langle \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_q, \mathrm{d}x_{q+1} \ldots \mathrm{d}x_n \rangle &\longmapsto \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

   eine perfekte Paarung mit Werten in $\Omega^n(\mathbb{R}^n)$ definiert.

2. Der Hodge $*$–Operator.
   Es sei $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\,\rangle, \mathrm{vol})$ wie in Aufgabe 1. Die Signatur von $\langle\,,\,\rangle$ sei $(a, n-a)$. Wir definieren den Hodge $*$–Operator durch

   $$\tau \wedge *\omega = \langle \tau, \omega \rangle \,\mathrm{vol}.$$

   Zeigen Sie, daß gilt:

   (a) (1 Punkt) Falls $\{i_1, \ldots, i_q, j_1, \ldots, j_{n-q}\} = \{1, \ldots, n\}$, dann gilt

   $$*(\mathrm{d}x_{i_1} \ldots \mathrm{d}x_{i_q}) = \varepsilon \,\mathrm{d}x_{j_1} \ldots \mathrm{d}x_{j_{n-q}}$$

   mit $\varepsilon = \mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_q, j_1 \ldots, i_{n-q})$. Insbesondere $*1 = \mathrm{vol}$.

   (b) (1 Punkt) Für $\omega \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$ gilt:

   $$\langle \omega, *\tau \rangle = (-1)^{q(n-q)+n-a} \langle *\omega, \tau \rangle$$

(c) (1 Punkt) Für $\omega \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$*(*\omega) = (-1)^{q(n-q)+n-a}\omega$$

(d) (1 Punkt) Der Hodge $*$–Operator ist eine Isometrie auf $(\Omega^*(\mathbb{R}^n), \langle\,,\,\rangle)$.

3. Die Maxwell–Gleichungen im Vakuum
(4 Punkte) Es seien $E = (E_x, E_y, E_z) : U \to \mathbb{R}^3$ das elektrische und $B = (B_x, B_y, B_z) : U \to \mathbb{R}^3$ das magnetische Feld, beides Vektorfelder auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^4$ mit Koordinaten x, y, z, t und Lorentzsignatur $(3, 1)$. Die Maxwellgleichungen im Vakuum lauten
$$\begin{aligned} \mathrm{rot} B &= \frac{\partial}{\partial t} E, \qquad \mathrm{div} E = 0 \\ \mathrm{rot} E &= -\frac{\partial}{\partial t} B, \quad \mathrm{div} B = 0. \end{aligned}$$
Wir definieren die elektromagnetische Feldstärke $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ durch
$$F = (E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_x\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}t + B_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - B_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + B_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
Zeigen Sie, daß gilt:
$$\mathrm{d}F = 0, \quad \mathrm{d}{*}F = 0.$$

4. Die symplektische Form.
(4 Punkte) Auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_{2n}$ betrachten wir die 2–Form
$$\omega = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_{n+1} + \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_{n+2} + \cdots + \mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{2n}$$
Zeigen Sie, daß $\mathrm{d}\omega = 0$, und daß $\omega^n = \pm n!\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{2n}$ gilt. Bestimmen Sie auch das Vorzeichen.

ω heisst symplektische Form und ist von fundamentaler Bedeutung in der klassischen Mechanik.

Abgabetermin: Freitag, 30. 4. 2010 um 10:00 Uhr.